

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Pentru itemii de mai jos, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Fie numărul complex $z = 1 + i$. Valoarea lui z^{2024} este:
 A. -2^{1012} ; B. 2^{1012} ; C. $2^{1012}i$; D. i .
- 5p 2. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + m = 0$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile ecuației să aibă loc relația $x_1^2 = x_2^2 + 3$.
 A. $m = -2$; B. $m = 0$; C. $m = -1, m = 3$; D. $m = 2$.
- 5p 3. Probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 20\}$, numărul $2^{n+4} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect este:
 A. $\frac{1}{4}$; B. $\frac{1}{2}$; C. 1 ; D. $\frac{1}{5}$.
- 5p 4. Fie expresia $E(x) = \log_{x^2}(x^3 + 2x^2 + x) - \log_x(x + 1)$. Atunci:
 A. $E(2) = E(6) = \frac{1}{4}$; B. $E(x) = \frac{1}{2}$, pentru $\forall x$ pentru care $E(x)$ este definită;
 C. Ecuația $E(x) = 1$ admite soluție unică; D. Ecuația $E(x) = \frac{1}{2}$ nu admite soluții reale.
- 5p 5. Se consideră ABC un triunghi echilateral a cărui arie este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Atunci valoarea produsului scalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ este:
 A. 6 ; B. $\sqrt{3}$; C. 3 ; D. $2\sqrt{3}$.
- 5p 6. Valorile $x \in [0, 2\pi]$ pentru care expresiile $a = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$, $b = 1 + \frac{5 \sin x - 2}{\cos^2 x}$, $c = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$ se află în progresie aritmetică, în această ordine, sunt:
 A. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$; B. $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}\right\}$; C. $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$; D. $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește următoarea lege de compoziție $A \circ B = A \cdot B - A - B + 2I_2$ și mulțimea $\mathcal{G} = \left\{X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \mid X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, a \neq 1\right\}$.
- 5p a) Să se determine $E \in \mathcal{G}$ astfel încât $A \circ E = A, \forall A \in \mathcal{G}$.
- 5p b) Să se găsească matricile $X \in \mathcal{G}$ care verifică ecuația $X \circ X = 10I_2$.
- 5p c) Să se calculeze $\underbrace{(-I_2) \circ (-I_2) \circ \dots \circ (-I_2)}_{2024 \text{ ori}} = (2^{2024} + 1)I_2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 14X^2 + 9$ și numărul $a = \sqrt{2} - \sqrt{5}$.
- 5p a) Să se verifice că a și $-a$ sunt rădăcini ale polinomului f .
- 5p b) Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
- 5p c) Să se arate că pentru orice polinom $h \in \mathbb{Z}[X]$ are loc $h(a) \neq \sqrt{10}$.

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) := \begin{cases} \frac{x^p - 1}{x \ln x}, & x > 1; \\ p, & x = 1, \end{cases}, p \in \mathbb{R}_+^*$.
- 5p a) Să se arate că are loc relația $f(x^2) \cdot 2x = f(x) \cdot (x^p + 1), \forall x \in [1, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că dacă o funcție continuă $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea că $g(x^2) = g(x), \forall x \in [1, +\infty)$, atunci funcția g este constantă.
- 5p c) Se mai păstrează rezultatul de la punctul b) dacă schimbăm domeniul de definiție al funcției g cu $(1, +\infty)$? Justificați.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{e^x}, & x < 1, \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$
- 5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine primitiva F a funcției f care are proprietatea $F(0) = e$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_1^e x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.